MATEMÁTICA

Tercer año
2018

Práctica 0

Irracionales. Reales. Operaciones con irracionales. Ecuaciones e inecuaciones en R.

1. Determiná cuáles de las siguientes expresiones representan números racionales. *Justificá tu respuesta*

a) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{15}$ **b)** $3\left(3-\sqrt{12}\right)^{-1}+3+7\sqrt{3}$

2. En un triángulo isósceles el lado desigual mide $6\sqrt{2}$ cm, el área es 24cm^2. Calculá, **sin aproximar**, el perímetro del triángulo.

3. Resolvé las siguientes ecuaciones en *R*. *Indicá el conjunto solución.*

a) $x^2-16=5$ **b)** $5x^2-10=(x-3)(x+3)$

c) $2(-3x+18)^2-7=11$ **d)** $(x-5)^2+6=2$

e) $(3x-2)^2-\dfrac{x-6}{2}=9\left(x^2-1\right)$ **f)** $\dfrac{\left(2x^2+1\right)^2}{5}=5$

g) $\dfrac{3x^2-\frac{4}{3}}{7}=0$ **h)** $\left(x^2-4\right)(x-4)=0$

i) $\left(x^2+3\right)(x+3)^2=0$ **j)** $\sqrt{4x^2}-6=-1$

k) $5+\sqrt{x}=1$ **l)** $\sqrt[3]{x^5}-12=20$

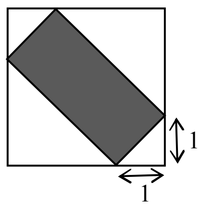
m) $3x^4-\sqrt{5}x^3=0$ **n)** $5x^2=10x$

ñ) $5+2\sqrt{7}=3\sqrt{7}+\dfrac{x^2}{5+\sqrt{7}}$ **o)** $\dfrac{x-\sqrt{3}}{11\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}}$

p) $2\sqrt{5}+\dfrac{x}{9-2\sqrt{5}}=\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ **q)** $1+\sqrt{7x^2-\sqrt{300}}=6-\sqrt{3}$

4. En la figura hay un rectángulo gris inscripto en un cuadrado.

Si se sabe que el perímetro del cuadrado, en centímetros, es $4+6\sqrt{2}$, calculá el área y el perímetro del rectángulo.



5. Hallá un número real k si se sabe que $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ es solución de la ecuación

$x^2-\dfrac{2k\sqrt{2}}{x}+\sqrt{2}x=0$.

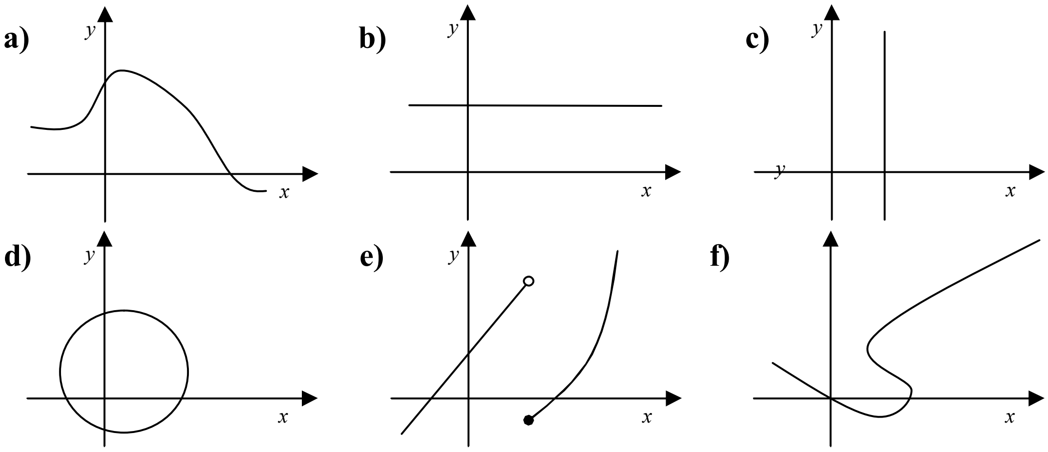
6. Resolvé las siguientes inecuaciones en *R* y expresar las soluciones como un intervalo o unión de intervalos.

a) $5x-9>11$ **b)** $-3x+5\leq 20$

c) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x+1}{2}>x-4$ **d)** $\sqrt{3}(x-2)\geq 2x+\sqrt{3}$

Funciones. Función lineal. Rectas. Paralelismo y perpendicularidad. Sistemas lineales. Intersección de rectas.

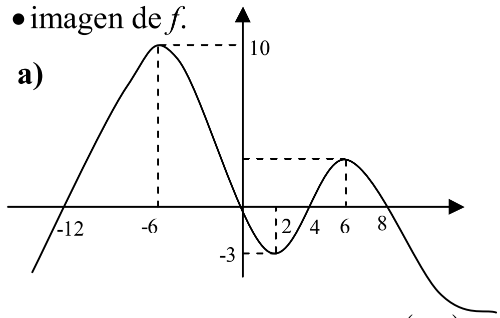
7. ¿Cuáles de los siguientes gráficos corresponden a una función? *Justificá tu respuesta.*



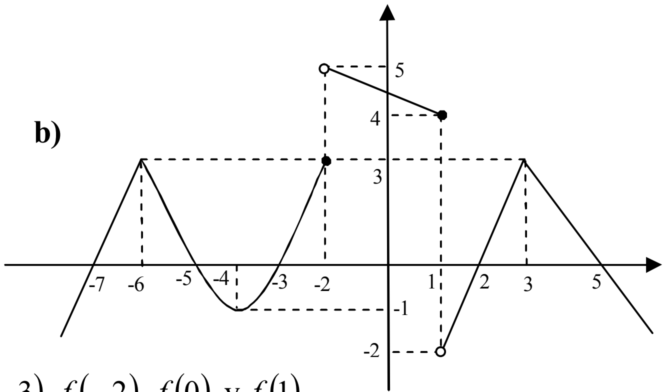
8. En cada caso, está representado el gráfico de una función $f : R \to R$, determiná:

- ceros, $C^0 = \{x \in Domf \ / \ f(x) = 0\}$,
- conjunto de positividad, $C^+ = \{x \in Domf \ / \ f(x) > 0\}$,
- conjunto de negatividad, $C^- = \{x \in Domf \ / \ f(x) < 0\}$,
- intervalos de crecimiento,
- intervalos de decrecimiento,
- imagen de *f*.

a)



b)



Observando el gráfico **b)** averiguá $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$ y $f(1)$.

9. Dada la función $f: R \to R \ / \ f(x) = 2x - 3$.

a) Calculá: $f(0)$ y $f(2)$.
b) Con los datos obtenidos **a)** hacé un gráfico de *f*.
c) Indicá ordenada al origen y pendiente de la recta determinada por el gráfico de *f*.
d) Hallá los puntos de intersección de la recta dibujada con los ejes coordenados.
e) Encontrá *x* tal que $f(x) = 5$.
f) Encontrá *b* si se sabe que $f(-b) = 3b$.
g) Determiná el conjunto de valores para los cuales se cumple que $f(x) \geq -4$ y escribilo como un intervalo.

10. En cada caso, hallá la función lineal *f* que cumpla lo pedido, hacé el gráfico correspondiente y encontrá la pendiente y la ordenada al origen de la recta determinada por el gráfico de *f*.

a) $f(0) = 2$ y $f(-2) = 6$ **b)** $f(-1) = 3$ y $f(2) = -6$ **c)** $f(0) = 6$ y $f(5) = 6$
d) Tiene pendiente 3 y el punto $(1,-2)$ pertenece al gráfico de *f*.

11. Sea la recta *r* de ecuación $y = -3x + 4$.

a) Hallá tres puntos de *r*.

b) ¿$(2{,}6) \in r$? ¿$(-1{,}7) \in r$?

c) Encontrá *k* para que $(k - 1{,}2k) \in r$

d) Hallá los puntos de corte de la recta *r* con los ejes coordenados.

12. En cada caso, da la ecuación de la recta que verifica lo pedido.

a) Pasa por los puntos (2,1) y (-1,4).

b) Pasa por el punto $(\sqrt{3},4)$ y es paralela a la recta $y = 2\sqrt{3}\,x - 5$.

c) Es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{2}{3}x + 7$ y pasa por el punto $(1{,}3)$.

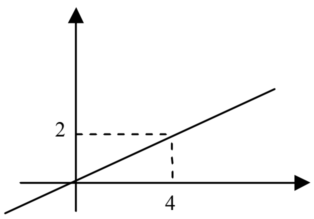
d) Es horizontal y el punto (5,-4) pertenece a la recta.

e) Es vertical y el punto (1,7) está en la recta.

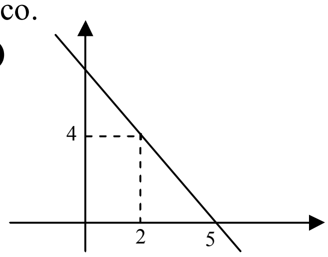
f) Es perpendicular a la recta $x = 5$ y pasa por el punto (2,7).

13. Hallá la ecuación de la recta representada en cada gráfico.

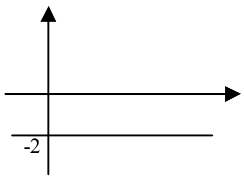
a)



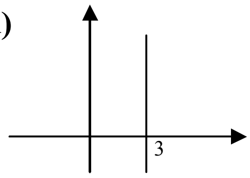
b)



c)



d)



14. Graficá y hallá ceros, conjuntos de positividad y de negatividad e imagen de las siguientes funciones:

a) $f : R \to R$ dada por $f(x) = 2x - 3$

b) $f : (-1{,}4) \to R$ dada por $f(x) = 2x - 3$

c) $f : (3/2,\, 5] \to R$ dada por $f(x) = 2x - 3$

d) $f : [0{,}4) \to R$ dada por $f(x) = -2x + 6$

e) $f : R \to R$ dada por $f(x) = -2$

15. ¿Cuál debe ser el dominio de $f(x) = 2x + 1$ para que su imagen sea el intervalo $[\,0\,;5\,)$?

16. Resolvé analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

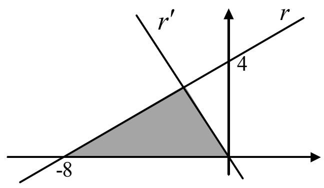
a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -4x + 3 \\ x = -1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ -6x + 2y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$

17. Proponé un sistema que describa la situación planteada y resolvelo.
Las entradas para un espectáculo se vendieron a \$800 la platea y \$650 los palcos. Calculá cuántas entradas de cada tipo se vendieron si asistieron 832 personas y los ingresos fueron de \$614300.

18. En cada caso, hallá la función lineal *f* que cumpla lo pedido.
a) f tenga por positividad al intervalo $(-4,+\infty)$ y cuyo gráfico sea paralelo a la recta $3x-2y=4$.
b) El gráfico de *f* sea perpendicular al de la función $g(x)=-\frac{1}{3}x+5$ y pasa por el punto de intersección del gráfico de g con la recta $x=6$.

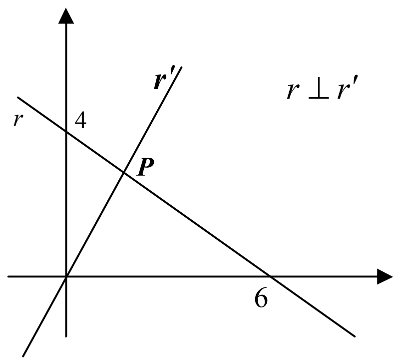
19. De acuerdo al dibujo, hallar:
a) La ecuación de la recta *r*.
b) La ecuación de la recta r' si se sabe que $r \perp r'$.
c) El área del triángulo sombreado.



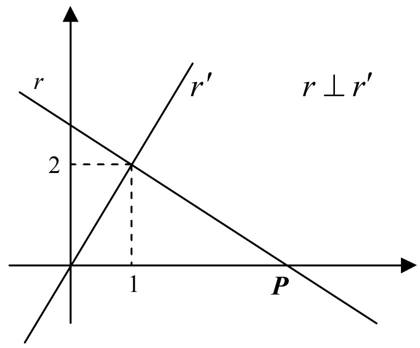
20. Una escultura de un cierto artista plástico, comprada hoy cuesta \$35000 y se sabe que aumenta su valor linealmente con el tiempo, de modo tal que, después de 10 años valdrá \$56000. Otra escultura del mismo artista, hoy se vende a \$40000 y se estima que dentro de 15 años valdrá \$64000.
a) Escribí la fórmula del valor *V* para cada una de las esculturas en función del tiempo. ($V_1(t)$ y $V_2(t)$).
b) Determiná cuál de las dos esculturas aumenta su valor más rápidamente.
c) ¿En qué momento el valor de las piezas será el mismo y cuál será dicho valor?

21. En cada caso, encontrá las coordenadas del punto *P*.
Ayuda: Primero hallá las ecuaciones de las dos rectas.

a)



b)



22. Dadas las rectas $r_1 : x+2y=8$ y $r_2 : y=ax+3$ y el punto $P=(2,b)$.
a) Hallar $a,b \in R$ si se sabe que $r_1 \cap r_2 = \{P\}$.
b) Encontrar una recta r_3 tal que $(3,-1) \in r_3$ y $r_3 \perp r_1$.

Respuestas

1. a) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{15}=4$, por lo tanto es un número racional.

b) $3\left(3-\sqrt{12}\right)^{-1}+3+7\sqrt{3}=5\sqrt{3}$, por lo tanto es un número irracional pues el producto de un racional por un irracional es irracional. *¿Sabés por qué?*

2. El perímetro es $16\sqrt{2}$ cm.

3. a) $S=\left\{-\sqrt{21};\sqrt{21}\right\}$ **b)** $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ **c)** $S=\{5;7\}$ **d)** $S=\phi$ **e)** $S=\left\{\frac{32}{25}\right\}$

f) $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$ **g)** $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$ **h)** $S=\{-2;2;4\}$ **i)** $S=\{-3\}$ **j)** $S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$

k) $S=\phi$ **l)** $S=\{8\}$ **m)** $S=\left\{0;\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$ **n)** $S=\{0;2\}$

ñ) $S=\left\{-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right\}$ **o)** $S=\{-5;5\}$ **p)** $S=\{61\}$ **q)** $S=\{-2;2\}$

4. $perímetro=6+2\sqrt{2}$ cm, $área=3\sqrt{2}$ cm^2.

5. $k=4/27$

6. a) $S=(4,+\infty)$ **b)** $S=[-5,+\infty)$ **c)** $S=(-\infty,3)$ **d)** $S=\left(-\infty,-9-2\sqrt{3}\right]$

7. a) Sí. **b)** Sí. **c)** No. **d)** No. **e)** Sí. **f)** No.

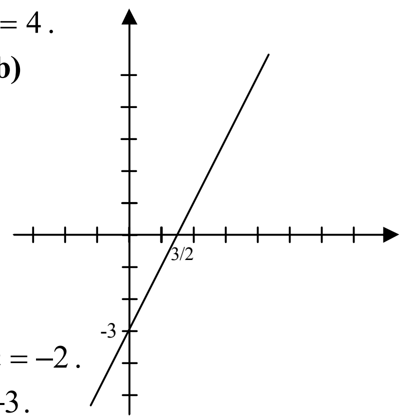
8. a) $C^0=\{-12,0,4,8\}$, $C^+=(-12,0)\cup(4,8)$, $C^-=(-\infty,-12)\cup(0,4)\cup(8,+\infty)$, crece en $(-\infty,-6)$ y en $(2,6)$, decrece en $(-6,2)$ y en $(6,+\infty)$, $Im(f)=(-\infty,10]$.

b) $C^0=\{-7,-5,-3,2{,}5\}$, $C^+=(-7,-5)\cup(-3,1]\cup(2,5)$, $C^-=(-\infty,-7)\cup(-5,-3)\cup(1,2)\cup(5,+\infty)$, crece en $(-\infty,-6)$, en $(-4,-2)$ y en $(1,3)$, decrece en $(-6,-4)$, en $(-2,1)$ y en $(3,+\infty)$, $Im(f)=(-\infty,3]\cup[4,5)$.

$f(-4)=-1$, $f(-3)=0$, $f(-2)=3$, $f(0)=4{,}5$ y $f(1)=4$.

9. a) $f(0)=-3$ y $f(2)=1$.

b)



c) ord. al origen: $b=-3$, pendiente: $m=2$.

d) Punto de corte con el eje *x*: $(3/2,0)$, punto de corte con el eje *y*: $(0,-3)$.

e) $x=4$

f) $b=-3/5$

g) $[-1/2,+\infty)$

10. a) $f(x)=-2x+2$, ord. al origen: $b=2$, pendiente: $m=-2$.

b) $f(x)=-3x$, ord. al origen: $b=0$, pendiente: $m=-3$.

c) $f(x)=6$, ord. al origen: $b=6$, pendiente: $m=0$.

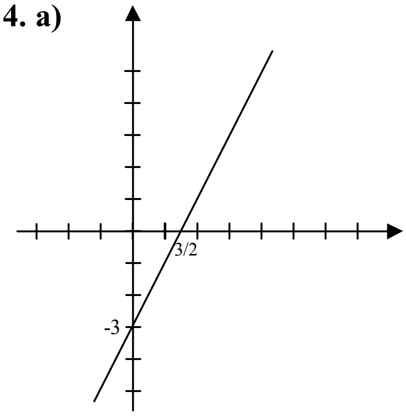
11. a) Por ejemplo, $(0,4)$, $(1,1)$ y $(3,-5)$. **b)** $(2,6)\notin r$ y $(-1,7)\in r$. **c)** $k=7/5$

d) Punto de corte con el eje *x*: $(7/3,0)$, punto de corte con el eje *y*: $(0,4)$.

12. a) $y=-x+3$ **b)** $y=2\sqrt{3}\,x-2$ **c)** $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ **d)** $y=-4$ **e)** $x=1$ **f)** $y=7$

13. a) $y=\frac{1}{2}x$ **b)** $y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$ **c)** $y=-2$ **d)** $x=3$

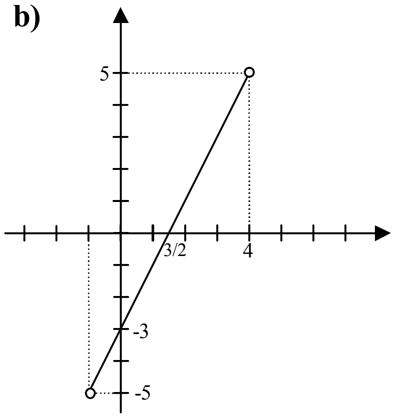
14. a)



$C^0=\left\{\frac{3}{2}\right\},\ C^+=\left(\frac{3}{2},+\infty\right),$

$C^-=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right),\ Im(f)=R$.

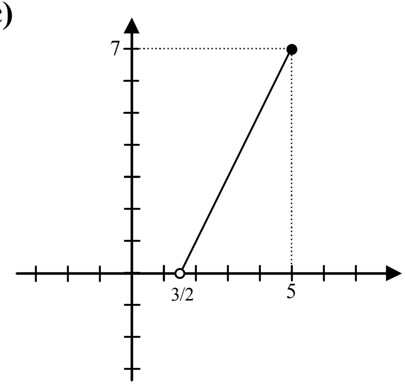
b)



$C^0=\left\{\frac{3}{2}\right\},\ C^+=\left(\frac{3}{2},4\right),$

$C^-=\left(-1,\frac{3}{2}\right), Im(f)=(-5,5)$.

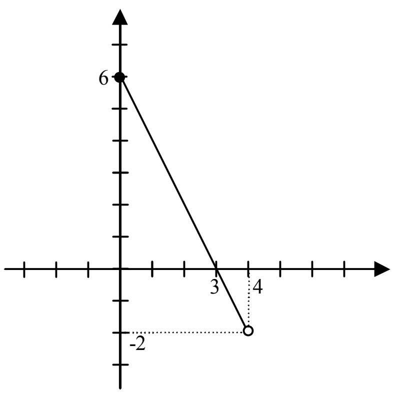
c)



$C^0=\phi,\ C^+=\left(\frac{3}{2},5\right],$

$C^-=\phi,\ \mathrm{Im}(f)=(0,7]$.

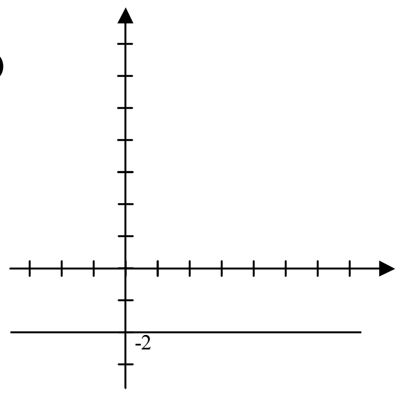
d)



$C^0=\{3\},\quad C^+=[0,3),$

$C^-=(3,4), \mathrm{Im}(f)=(-2,6]$

e)



$C^0=\phi,\quad C^+=\phi,$

$C^-=R, Im(f)=\{-2\}$.

15. $Dom(f)=\left[-\frac{1}{2},2\right)$

16. a) $S=\{(2{,}0)\}$. las rectas se intersecan en el punto $(2{,}0)$.

b) $S=\{(2,-1)\}$, las rectas se intersecan en el punto $(2,-1)$.

c) $S=\left\{\left(-\frac{1}{2},4\right)\right\}$, las rectas se intersecan en el punto $\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

d) $S=\{(-1{,}7)\}$, las rectas se intersecan en el punto $(-1{,}7)$.

e) El sistema que resolviste es incompatible. La solución es el conjunto vacío ($S=\phi$).
Las rectas no se cortan, son paralelas.

f) El sistema que resolviste es compatible indeterminado pues tiene infinitas soluciones. En este caso las dos ecuaciones corresponden a la misma recta. Todos los puntos de la recta son la solución del sistema.

17. $\begin{cases} x+y=832 \\ 800x+650y=614300 \end{cases}$ Se vendieron 490 plateas y 342 palcos.

18. a) $f(x)=\frac{3}{2}x+6$ **b)** $f(x)=3x-15$

19. a) $r: y = \frac{1}{2}x + 4$ **b)** $r': y = -2x$

c) $área = \frac{b.h}{2} = \frac{8.\frac{16}{5}}{2} = \frac{64}{5}$ (la altura es 16/5 pues $r \cap r' = \left\{\left(-\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)\right\}$).

20. a) $V_1(t) = 2100t + 35000$, $V_2(t) = 1600t + 40000$

b) La primera escultura.

c) A los 10 años y el valor de las esculturas será de $56000 cada una.

21. a) $P = \left(\frac{24}{13}, \frac{16}{13}\right)$ $\left(r: y = -\frac{2}{3}x + 4,\ r': y = \frac{3}{2}x\right)$

b) $P = (5,0)$ $\left(r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},\ r': y = 2x\right)$

22. a) $a = 0, b = 3.$ **b)** $r_3: y = 2x - 7$